あるハイブリッドタイプの点列と非拡大写像の不動点の存在について (非加法性の数理と情報 : 凸解析との接点)

厚芝, 幸子

数理解析研究所講究録
第 1683 巻 2010 年 78-83

あるハイブリッドタイプの点列と非拡大写像の不動点の存在について

山梨大学教育人間科学部 厚芝 幸子 (SACHIKO ATSUSHIBA)

1. 序

H を実 Hilbert 空間とし, C を H の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が C から C への非拡大であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときであり, $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す. 非線形写像の不動点をみつける問題, すなわち, 不動点近似の問題については多くの数学者によって研究され, 幾つかの不動点をみつけるための点列近似法が研究されている. その結果として, [1, 12, 13, 15, 17] など不動点への強および弱収束定理が多数示されている. そのような中で Nakajo-Takahashi [9] は数理計画法におけるハイブリッド法の考えを用いて, 以下の通り, 非拡大写像の不動点をみつけるための点列に関して研究し, 強収束定理を証明した.

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である ([6, 11, 14] も参照). [2] では, この定理を可換な非拡大半群に対する強収束定理へ一般化した定理を示している. 一方, Nakajo-Takahashi [9] の考え, Halpern [5] の考えをもとに Martinez-Yanes and Xu [7] は以下の点列を導入し, 強収束定理を示した:

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n x_1 + (1 - \alpha_n) T x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z \rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H09, 49M05.

Key words and phrases. Fixed point, nonexpansive mapping, nonexpansive semigroup, strong convergence, iteration, hybrid method, shrinking method.

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である.

本報告では, Martinez-Yanes and Xu [7], Matsushita-Takahashi [8], Nakajo-Takahashi [9] の考えを受けて, 不動点集合が空でないという仮定なしで, 非拡大写像に対して定義される点列 (2) の well-definedness について探究する. さらに, 共通不動点が存在するための必要十分条件はその点列が有界であることも示す.

2. 準備

本論文では以後, H は実 Hilbert 空間を表し, $x_n \to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に強収束することを表す. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする. さらに $\mathbb{N}$ はすべての正整数からなる集合を表す.

C は H の閉凸部分集合とする. すると, 任意の $x \in H$ に対して,

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

をみたす C の元 x_0 が唯一存在する. このとき, $P_C x = x_0$ で定義される写像 P_C は H から C の上への距離射影という. x は H の元で u は C の元とする. このとき, $u = P_C x$ であることの必要十分条件は

$$\langle u - y, x - u \rangle \geq 0 \tag{3}$$

が任意の $y \in C$ に対して成立することである ([16] 参照).

3. HYBRID TYPE の点列について

Matsushita-Takahashi [8] は点列 (1) について研究し, 以下の通り $F(T) \neq \emptyset$ という仮定なしでこの点列が well-defined であることを示した.

Theorem 3.1. C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. T は C から C への非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ みたす実数列とする. $x_1 = x$ を C の任意の点とし, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は well-defined である.

また, Matsushita-Takahashi [8] は点列 (1) について研究し, 以下の通り $F(T) \neq \emptyset$ であるための必要十分条件を確立した.

Theorem 3.2. C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. T は C から C への非拡大写像とし, $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ と $\underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < 1$. $\alpha_n \in [0,1]$ をみたす実数列とする. $x_1 = x$ を C の任意の点として, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで $P_{C_n\cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である. すると $F(T) \neq \emptyset$ であることの必要十分条件は $\{x_n\}$ が有界であることである.

4. 非拡大写像に対して定義される点列と不動点の存在について

この節では, 第2節の定理の考えを受けて, 点列 (2) について研究する. その結果として, Martinez-Yanes and Xu [7], Matsushita-Takahashi [8], Nakajo-Takahashi [9] の考えを用いて, 共通不動点集合が空でないという仮定なしで, 点列 (2) が well-definedness であることを示す. さらに, 不動点が存在するための必要十分条件についても探求する ([4] 参照). まず, $F(T) \neq \emptyset$ の仮定なしで点列 (1) が well-defined であることを示す.

Theorem 4.1. C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. T は C 上の非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ をみたす実数列とする. $x_1 = x$ を C の任意の元とし, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで $P_{C_n\cap Q_n}$ は H から C_n の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は well-defined である.

次に, $F(T) \neq \emptyset$ であることの必要十分条件について記す.

Theorem 4.2. C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. T は C 上の非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ であり, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたす実数列

とする. $x_1 = x$ を C の任意の元とし, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である. すると $F(T) \neq \emptyset$ であることの必要十分条件は $\{x_n\}$ が有界であることである.

同様にして以下の定理も示せる.

Theorem 4.3. C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. T は C 上の非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \le \alpha_n \le 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ をみたす実数列とする. x を C の任意の元とし, $C_1 = C, x_1 = P_{C_1} x$ とし, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x, \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases} \tag{4}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は well-defined である.

次に, (4) で定義される点列が有界であることは $F(T) \neq \emptyset$ であることの必要十分条件であることを示す.

Theorem 4.4. C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. T は C 上の非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \le \alpha_n \le 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ であり, $\varliminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたす実数列とする. x を C の任意の元とし, $C_1 = C, x_1 = P_{C_1} x$ とし, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで P_{C_n} は H から C_n の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ が有界であることの必要十分条件は $F(T) \neq \emptyset$ である.

Theorem 4.1 の系として次の結果を得る.

Theorem 4.5. C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. T は C 上の非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \le \alpha_n \le 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ をみたす実数列とする. $x_1 = x$ を C の任

意の元とし, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C : \|Tx_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から C_n の上への距離射影である. すると $\{x_n\}$ は well-defined である.

次に Theorem 4.2 の系として, $F(T) \neq \emptyset$ であることの必要十分条件について記す.

Theorem 4.6. C は Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. T は C 上の非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ であり, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたす実数列とする. $x_1 = x$ を C の任意の元とし, $\{x_n\}$ を以下のように定義される点列とする:

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ C_n = \{z \in C : \|Tx_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \alpha_n(\|x_1\|^2 + 2\langle x_n - x_1, z\rangle)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_1 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ここで $P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である. すると $F(T) \neq \emptyset$ であることの必要十分条件は $\{x_n\}$ が有界であることである.

References

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive semigroups by the Mann iteration process*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska **51** (2) (1997), 1–16.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive semigroups by a hybrid method*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 231–242.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *The sequences by the hybrid type method and the existence of common fixed points of nonexpansive semigroups in a Hilbers space*, Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, **2009** (2009), 19-29.

[4] S. Atsushiba, *The sequences by a hybrid type method and the existence of common fixed points of nonlinear mappings*, to appear.

[5] B. Halpern, *Fixed points of nonexpansive maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 957–961.

[6] B. Martinet, *Regularisation d'inequations variationnelles par approximations successive*, Rev. Franc. Inform. Rech. Opéer. **4** (1970), 154–159.

[7] C. Martinez-Yanesa and H.-K Xu, *Strong convergence of the CQ method for fixed point iteration processes*, Nonlinear Anal., **64** (2006), 2400–2411.

[8] S. Matsushita and W. Takahashi, *The sequences by the hybrid method and the existence of fixed points of nonexpansive mappings in a Hilbers space*, Proceedingss of the 8th international Conference on Fixed Point Theory and its Applications, (2008), pp. 109–113.

[9] K. Nakajo and W.Takahashi, *Strong Convergence theorems for nonexpansive mappings and non-expansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279**, (2002), 372-378.

[10] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[11] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J.Control and Optim., **14** (1976), 877–898.

[12] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings,* J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71-83.

[13] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 73–87.

[14] M. V. Solodov and B.F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Programming Ser. A. **87** (2000), 189–202.

[15] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications,* Nonlinear Anal. **30** (1997), 1287-1293.

[16] W. Takahashi, Nonlinear functional analysis - Fixed point theory and its application, Yokohama Publeishers, 2000.

[17] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings,* Arch. Math., **58** (1992), 486–491.

(S. Atsushiba) Department of Mathematics and Physics, Interdisciplinary Sciences Course, Faculty of Education and Human Sciences, University of Yamanashi, 4-4-37 Takeda Kofu-shi, Yamanashi 400-8510, JAPAN

E-mail address: asachiko@yamanashi.ac.jp